Некоторые аналитические аппроксимации для приближенного определения контакта

Ю.И. Дубовенко
Украина, Киев, Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, email: nemishayeve@ukr.net

Решение $\zeta(x)$ *нелинейной* обратной задачи потенциала для контактной поверхности на классе Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ границ $\zeta(x)$ раздела однородных сред с высокой точностью заменимо *линейным* уравнением аналитического продолжения вертикальной компоненты гравиполя $u(x)$ к тяготеющим массам на *среднюю глубину* $h=\zeta(x)$ [1]:

$$u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi=\zeta(x)\approx\zeta(x;h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi)-h]d\xi .$$

Исходя из физического смысла этой процедуры, получаем следующее приближение

$$\zeta(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi ,$$

аппроксимирующее решение задачи с точностью до $h^{-2}(h^+-h^-)^2$ – квадрата разности значений поля на уровнях $y=0$ и $y=-h$. Отсюда *нельзя* определить поле $u(x,h)$, продлив $u(x)$ на уровень $y=h>0$, так как прямая $y=h$ разбивает тяготеющие массы на две части, одна из них при $\zeta(x)\le h$ будет *ниже* $y=h$, т.е. функция $u(x,y)$ при $y<h$ – негармоническая.

Найти приближение $\zeta(x,h)$ можно как границу последовательности $\{\zeta_n(x,h)\}$, полученной из процесса итераций Лаврентьева-Андреева

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,x)d\xi+v(x),\ \zeta_0(x,h)\equiv v(x)=u(x)-h,\ n=0,\infty .$$

Доказано, что на классе $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ решение нелинейной контактной задачи $\zeta(x)$ с точностью $h^{-2}(h^+-h^-)^2$ при $h\to\infty$ находится из линеаризированного выражения

$$\zeta^{(n)}(x,h)=\zeta(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\eta(\xi,x)d\xi . \qquad (1)$$

Из этой формулы, как частные случаи при $n=0,1,2$, вытекают известные аналитические конструкции Нумерова [2], Хьюза [3] и Страхова [4], где $\Delta u(\xi)=u(\xi,0)-u(x,0)$:

$$\zeta^{(0)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi)d\xi, \qquad (2)$$

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2}-\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi , \qquad (3)$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}-4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}+\frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi , \qquad (4)$$

Формулы (1), (3), (4) при $n\ge 3$ непригодны для вычислений из-за нарастания с номером итерации ошибок округлений при вычислениях в окрестности точки $\xi=x$. Это не свойственно (2). Во избежание этого следует ядра интегралов суммировать с разными знаками и возрастающими биноиальными коэффициентами. Суммирование элементарных дробей в ядрах преобразований с индексами $n>0$ по схеме (1) при $n=1,2,3$ определяет положительные ядра преобразований, а при $n=4$ – уже нет.

Поэтому в практике вычисления приближений (1) контакта $\zeta^{(n)}(x,h)$ стоит взять в качестве "нулевого приближения" формулу (2) и ограничиться одним из выражений:

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[10h^2+(\xi-x)^2]h}{[h^2+(\xi-x)^2][(2h)^2+(\xi-x)^2]}\cdot\Delta u(\xi)d\xi,$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4]h}{[h^2+(\xi-x)^2][(2h)^2+(\xi-x)^2][(3h)^2+(\xi-x)^2]}\Delta u(\xi)d\xi , \qquad (5)$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2++29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6]h}{[h^2+(\xi-x)^2][(2h)^2+(\xi-x)^2][(3h)^2+(\xi-x)^2][(4h)^2+(\xi-x)^2]}\Delta u(\xi)d\xi$$

Приближения (1) $\zeta^{(n)}(x,h)$ можно существенно уточнить с помощью поправок. К примеру, поправка $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$ вида

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{[h^2+(\xi-x)^2]^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi , \qquad (6)$$

повысит точность приближений до $h^{-3}\omega^3(\xi)$; в условиях слабоградиентного поля достаточно дать поправку $\Delta\tilde{\zeta}(x,h) = u(\xi_0)\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y}$, где $u(\xi_0)$ – "среднее" значение поля на поверхности наблюдений.

Можно уточнить приближения $\zeta^{(n)}(x,h)$ поправкой $\zeta_1^{(k)}(x,h) = \sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2 + \Delta\zeta(x)}$, $k = 0,1,2,3...$, полученной из решения линейного интегрального уравнения 1-го рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2 + (\xi - x)^2}d\xi = v(x),$$

$$v(x) = u(x) - \zeta^{(k)}(x,h) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2 + (\xi - x)^2}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2 + (\xi - x)^2}d\xi, \quad (7)$$

повысив точность до $\Delta\zeta_0^2(h^+)^{-3}$, где $\zeta_0 = \max_x|\Delta\zeta(x)|$.

Эта поправка допускает обобщение в виде вычисления последовательных приближений $\zeta_{n+1}(x) = \zeta_n(x) + \Delta\zeta_n(x)$, $\Delta\zeta_n(x) = \lim_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x)$ с помощью итераций:

$$\zeta_0(x) = \zeta^{(k)}(x,h),\ k = 0,1,2,3...,\ h^- \le h \le h^+, \quad (8)$$

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x) = u(x) - \zeta_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(\xi)}d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi + \Delta\zeta_n^{(m)}(x),\quad m = \overline{0,\infty},\quad n = \overline{0,\infty}$$

На классе $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ последовательные приближения (5-8) являются однозначными и устойчивыми (сходящимися). Каждый способ сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с ядром типа Пуассона.

1. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1988. – №6. – С.30-33
2. *Нумеров Б.В.* Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. – 1930. – №21. – С. 569–574.
3. *Hughes D.* The analitic basis of gravity interpretation // Geophys. – 1942. – 7, № 2. – P. 169–178.
4. *Страхов В.Н.* Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1976. – №3. – С. 54–66.

Тезисы, представленные на 5-ю международную научную конференцию молодых ученых и студентов "Фундаментальная и прикладная геологическая наука глазами молодых ученых: достижения, перспективы, проблемы и пути их решения", Баку, 7-8 октября 2013 г.